# Σύνθετος τύπος του Simpson

20/12/2017.

Θεωρούμε τη διαμέριση $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ n άρτιος και $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε ο σύνθετος τύπος του Simpson προκύπτει από το άθροισμα των απλών τύπων στα διαστήματα $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$.

$$Q^{S}_{n+1} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right) + \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right) + \dots +$$

$$+ \frac{h}{3}\left(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right) =$$

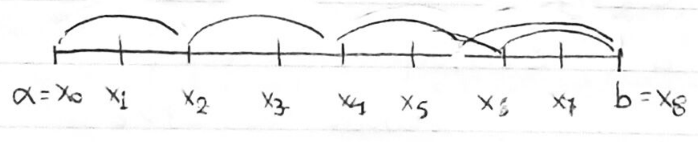
$$= \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big).$$

<u>Παράσταση σφάλματος του συνθ. τύπου του Simpson</u>

Έστω $f \in C^4[a,b]$ και η διαμέριση $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ n άρτιος και $h = \frac{b-a}{n}$, τότε το σφάλμα $R^{S}_{n+1}$ ισχύει.

$$R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad , \text{όπου } \xi \in (a,b)$$

$$R^{S}_{n+1}(f) = I(f) - Q^{S}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n/2} \left(I(f) - Q_3(f)\right)\Big|_{[x_{2(i-1)},\, x_{2i}]}$$




$$= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} R_3(f) = -\frac{1}{2^4 \cdot 180} \sum_{i=1}^{n/2} (x_{2i} - x_{2(i-1)})^5 \cdot f^{(4)}(\xi_i) =$$

$$= \frac{-1}{2^4\, 180} \cdot \left[(x_2 - x_0)^5 f^{(4)}(\xi_1) + (x_4 - x_2)^5 f^{(4)}(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-2})^5 f^{(4)}(\xi_{n/2})\right]$$

$$= -\frac{h^4}{180}\left[\frac{n}{2}(x_2 - x_0)\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)\right] = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi).$$

$\xi_i \in (x_{2(i-1)}, x_{2i})$, $i = 1, 2, \dots, n/2$, $\xi \in (a,b)$, $R^{S}_{n+1}(f) = O(h^4)$

# Ο Σύνθετος τύπος των $\frac{3}{8}$

Θεωρούμε τη διαμέριση $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$n$ πολλαπλάσιο του 3 και $h = \frac{b-a}{n}$ ώστε ο σύνθετος τύπος των $\frac{3}{8}$ προκύπτει από το άθροισμα των απλών τύπων στα διαστήματα $[x_0, x_3], [x_3, x_6], \ldots, [x_{n-3}, x_n]$

$$Q_{n+1}^{3/8} = \frac{3h}{8}\big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \ldots + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$

Στην πράξη εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του Τραπεζίου. στη συνέχεια υποδιπλασιάζουμε το διάστημα (διπλασιάζεται το $n$) και εφαρμόζουμε τον σύνθετο τύπο. Αυτό γίνεται επαναληπτικά μέχρι οι δυο διαδοχικές προσεγγίσεις να διαφέρουν όσο και η επιθυμητή ακρίβεια


$$Q_1 = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big), \quad h \leftarrow \frac{h}{2},$$

$$Q_2 = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \frac{f(x_2)}{2}\right)$$

## Αλγόριθμος Τραπεζίου

<u>Δεδομένα</u>: $f$, $a, b$, $\varepsilon$ (επιθυμητή ακρίβεια)

$h = b - a$,

$n = 1$

$S = \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}$

$Q_1 = h \cdot S$

$h = \frac{h}{2}$

$n = 2$

$S = S + f(a+h)$

$Q_2 = h \cdot S$

(*) Εφόσον $|Q_2 - Q_1| > \varepsilon$

$Q_1 = Q_2$

$h = \frac{h}{2}$

$n = 2n$

$S = S + \sum_{i=1}^{n/2} f(a + 2(i-1)h)$

Για $i = 1, \ldots, n$

$S = S + f(a + (2i-1) \cdot h)$

Τέλος 'Για'

(*) Τέλος Εφόσον Αποτέλεσμα $Q_2$ η προσεγγ. του ολοκλήρ.